

تحريث: نفرض $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وليكن X_1, X_2, \dots, X_6 عينات لـ X وليكن $T_1 = a \left\{ (X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2 \right\}$ مقدرًا نظريًا لـ σ^2 و المطلوب:

- 1- عينة ثابتة a من أجل أن يكون T_1 مقدرًا عشوائيًا لـ σ^2
- 2- نفرض أن: $T_2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^6 (X_i - \bar{X})^2$ مقدرًا آخر لـ σ^2 عندئذ بيّن أياهما المقدرين أكثر (أفضل) ..

الحل: لدينا فرضنا: $ET_1 = \sigma^2$ ولدينا $X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2)$ أيضًا $X_3 - X_4 \sim N(0, 2\sigma^2)$ و $X_5 - X_6 \sim N(0, 2\sigma^2)$

$$\frac{T_1}{2a\sigma^2} = \underbrace{\left(\frac{X_1 - X_2 - 0}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2}_{\chi^2(1)} + \underbrace{\left(\frac{X_3 - X_4 - 0}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2}_{\chi^2(1)} + \underbrace{\left(\frac{X_5 - X_6 - 0}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2}_{\chi^2(1)}$$

$$\frac{T_1}{2a\sigma^2} \sim \chi^2(3)$$

در درجات الحرية

$$E\left(\frac{T_1}{2a\sigma^2}\right) = 3 \Rightarrow \frac{1}{2a\sigma^2} ET_1 = 3 \Rightarrow$$

$$ET_1 = \sigma^2 \quad \text{بالفرض}$$

$$ET_1 = 6a\sigma^2 \Rightarrow \sigma^2 = 6a\sigma^2 \Rightarrow$$

$$6a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$

أي أن:

$$T_1 = \frac{1}{6} \left\{ (X_1 - X_2)^2 + (X_3 - X_4)^2 + (X_5 - X_6)^2 \right\}$$

هذا يعني أن:

$$\frac{6T_1}{2\sigma^2} \sim \chi^2(3) \Rightarrow V\left(\frac{3T_1}{\sigma^2}\right) = \sigma^2 \Rightarrow$$

$$\frac{9}{\sigma^4} V(T_1) = 6 \Rightarrow V(T_1) = \frac{6}{9} \sigma^4 \Rightarrow V(T_1) = \frac{2}{3} \sigma^4$$

$$\frac{5T_2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^6 \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(5)$$

$$E\left(\frac{5T_2}{\sigma^2}\right) = 5 \Rightarrow \frac{5}{\sigma^2} E T_2 = 5 \Rightarrow E T_2 = \sigma^2$$

$$V\left(\frac{5T_2}{\sigma^2}\right) = \frac{25}{\sigma^4} V(T_2) = 10 \Rightarrow V(T_2) = \frac{10\sigma^4}{25}$$

$$= \frac{2}{5} \sigma^4 = \frac{6}{15} \sigma^4$$

$$V(T_1) = \frac{2}{3} \sigma^4 = \frac{10}{15} \sigma^4 \Rightarrow V(T_2) < V(T_1)$$

وبالتالي فإن $V(T_2)$ أفضل (أكثر) من $V(T_1)$.

الإحصاء الكاف (المقدّر الكاف):

* نعرفه لدينا مجتمع إحصائي معروف بتوزيع احتمالي وسيطه مجهول. ولناخذ من عينة عشوائية بحجم n كذا نريد نقول عنه المقدّر الكاف. النقطة الوسطى θ أنه إحصاء كافٍ إذا أعطت معلومات كافية عن هذا الوسط وذلك على أساس هذه العينة وحده. أثبت أن المقدّر الكاف هو إحصاء كافٍ يوجد لدينا قاي تينيه ← القايّة الأولى: هي أن يكون

$$\textcircled{1} - P(X_1, X_2, \dots, X_n | T = t)$$

حال من الوسط θ هذا يعني أن T إحصاء كافٍ...

$$P(X_1, X_2, \dots, X_n | T)$$

التوزيع الاحتمالي المشترك لتغيرات العينة

$$\textcircled{2} L = P(X_1, X_2, \dots, X_n, \alpha) = \sum_{i=1}^n P_{X_i}(X_i, \alpha) = g(t, \alpha) \cdot H(X_1, \dots, X_n)$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(X_i, \alpha) = g(t, \alpha) \cdot H(X_1, \dots, X_n)$$

مثال: نعرفه لدينا مجتمعاً إحصائياً بنولياً وسيطه μ ولناخذ من عينة عشوائية بحجم n كذا نريد بينه أن الإحصاء $T = \sum_{i=1}^n X_i$ عند إحصاء كافٍ.

التوزيع الاحتمالي

الحل: $P_X(x, p) = p^x (1-p)^{1-x} ; x = 0, 1$

$$L = \prod_{i=1}^n P_{\sum_{i=1}^n x_i} (x_i, p) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$P(x_1, \dots, x_n / T=t) = \frac{P(x_1, x_2, \dots, x_n / t = \sum_{i=1}^n x_i)}{P_T(t)}$$

$$= \frac{P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n, T=t)}{P(T=t)}$$

$$= \frac{P(x_1, x_2, \dots, x_n)}{P(T=t)} = \frac{p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}}{P_T(t)}$$

نبقى علينا حاد، لتوزيع الاحتمالي T

وهو المتابعة، المتولدة $\Rightarrow M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = (M_X(t))^n = (q + pe^t)^n$ لثاني

$$P_T(t) = C_t^n p^t q^{n-t}$$

$$\rightarrow = \frac{p^t q^{n-t}}{C_t^n p^t q^{n-t}} = \frac{1}{C_t^n}$$

وواضح أنه $\frac{1}{C_t^n}$ حاله من المعطيات p من المعطيات t ، لتوزيع المستند، لشروط حاله من المعطيات C_t^n والمتاح $T = \sum_{i=1}^n X_i$ على امكان كافي للمعطيات p

ملاحظة أخرى:

$$L = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} = p^t (1-p)^{n-t} = (C_t^n p^t (1-p)^{n-t}) \frac{1}{C_t^n}$$

$$= g(t, p) \cdot H(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

أي أننا استطعنا كتابة L على المجتمع الإحصائي X شكل حد والقيس الأول تابع t, p وتمثل توزيعاً احتمالياً لبرنولي وسطحه الأول p والثاني n والثاني تابع فقط لتغيرات المعطيات العشوائية وهي H التابعة لـ X

مثال: نفرض لدينا مجتمعاً آمبيرياً مع مبرماً له دالة كثافة احتمالية

$$p(x, \alpha) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad x > 0$$

حلنا هذا من قبل، المجتمع كسيت عشوائية بسيط n كسيت

بين أن: $T = \sum_{i=1}^n X_i$ محل آمبيرياً له دالة كثافة

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | t) = \frac{f(x_1, \dots, x_n)}{f_T(t)}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)}{f_T(t)} = \frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\alpha}} f_T(t)$$

والآن سوف نحسب دالة الكثافة T عن طريق الدالة مولدة:

$$M \sum_{i=1}^n X_i(t) = (M_{X_1}(t))^n = (1 - \alpha t)^{-n} = (1 - \alpha t)^{-n}$$

وهي دالة مولدة لغاوي وسيطة الأول: $\lambda = n$ ووسيط الثاني

$$f_T(t) = \frac{\alpha \lambda}{\Gamma(\lambda)} t^{\lambda-1} e^{-\alpha t} = \frac{1}{\alpha^n \Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\alpha}} \quad \alpha = \frac{1}{\alpha} \text{ وبالتالي}$$

وهي دالة الكثافة الاحتمالية للإصدار T وبالتالي:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | t) = \frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{t}{\alpha}} \frac{1}{\alpha^n \Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\alpha}}$$

بالعودة إلى الوسط α هذا حيث أن $T = \sum_{i=1}^n X_i$ محل آمبيرياً

$$L = \prod_{i=1}^n p(x_i, \alpha) = \prod_{i=1}^n p(x_i) \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x_i}{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha^n} e^{-\frac{t}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha^n \Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\alpha}} \frac{\Gamma(n)}{t^{n-1}}$$

وهي دالة كثافة لغاوي وسيطة n, α

$$= g(t, \alpha) \cdot H(x_1, \dots, x_n)$$

معلومات فيشر

إذا كان لدينا مجموعة أمثلية فعموماً يتوزع امثالي وسيط المجهول α لدينا عند كثافة عشوائية L كمنتهى التعريف. معلومات فيشر: هي المعلومات التي نعطها الكثافة العشوائية حول α الوسيط. وهذه المعلومات نضعها في:

لدينا L على التقدير الاحتمالي، مستنداً لمغيرات الكثافة كمنتهى على أنه تكسب:

$$\int_{R_n} L \cdot dV = 1 \quad \text{و} \quad dV = dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_n$$

نشتق طرف العلاقة (1) بالنسبة للوسيط α نجد أن:

$$\int_{R_n} \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \int_{R_n} \frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \cdot L \cdot dV = \alpha$$

$$E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}\right) = 0 \quad [2]$$

الآن سوف نشتق طرف العلاقة (2) بالنسبة لـ α^2 مرة أخرى

$$\int_{R_n} \left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} \cdot L + \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right)^2 \cdot L \right] \cdot dV = 0$$

$$\int_{R_n} \left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right)^2 \right] L \cdot dV = 0 \Rightarrow$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}\right)^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$E\left(\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2}\right) = E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}\right)^2$$

$$V\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}\right) = E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}\right)^2 - \left(E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2}\right) = E\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}\right)^2 = V\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}\right)$$

وهي معلومات فيشر التي نعطها الكثافة التي هي n حول الوسيط α

$$I_L = E \left(\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} \right) = V \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right) = E \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} \right)^2$$

ملحوظة: لدينا $L = \prod_{i=1}^n f(x_i, \alpha)$ هذا يجب أن
 $\ln L = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i, \alpha)$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ln f}{\partial \alpha} \Rightarrow \text{نشتق مرة أخرى}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \ln f}{\partial \alpha^2} \Rightarrow \frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} = \sum_{i=1}^n \frac{-\partial^2 \ln f}{\partial \alpha^2}$$

$$E \left(\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} \right) = \sum_{i=1}^n E \left(\frac{-\partial^2 \ln f}{\partial \alpha^2} \right) \quad \text{نأخذ التوقع الرياضي للطرفية}$$

$$\Rightarrow I_2 = \sum_{i=1}^n I_f \Rightarrow \bar{I}_L = n \bar{I}_f$$

مثال: افترض لدينا مجموعاً آمالياً نواحدياً وسيطاً المحيول λ لدينا عين عشوائية

$$L = \prod_{i=1}^n P_{X_i}(x_i, \lambda) = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \quad \text{الحل:}$$

$$e^{-n\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}$$

نأخذ لوغاريتم الطرفية:

$$\ln L = -n\lambda + \sum_{i=1}^n x_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln x_i!$$

نشتق الطرفية مرتين بالنسبة لـ λ فنجد أن:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = -n + \frac{\sum x_i}{\lambda}$$

نشتق مرة أخرى بالنسبة لـ λ فنجد أن:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = -\frac{\sum x_i}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = \frac{\sum x_i}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow E \left(\frac{-\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n E x_i \Rightarrow I_2 = \frac{n\lambda}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda}$$

وهي معلومات فيشر التي تفقد العينات التي حجمها n حول المعسلة θ
مثال: مجتمع إحصائي موثوق به $f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$; $x > 0$
 خلاف ذلك $= 0$

ولنا أنه حيث كانت عينات حجمها n والمطلوب إيجاد معلومات فيشر
الحل: $L = \frac{1}{\theta^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta}}$ $\xrightarrow[\text{الطرفية}]{\text{أخذ لوغاريتم}}$ $\ln L = -n \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta}$
 مشتق النسبة لـ θ :

$$\frac{d \ln L}{d \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\theta^2}$$

مشتق مرة أخرى

$$\Rightarrow \frac{d^2 \ln L}{d \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2 \sum_{i=1}^n x_i}{\theta^3}$$

نقلب إشارة (-)

$$\Rightarrow -\frac{d^2 \ln L}{d \theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} + 2 \frac{\sum x_i}{\theta^3}$$

لأنه المتوقع الرياضي للطرفية

$$\Rightarrow I_L = E\left(-\frac{d^2 \ln L}{d \theta^2}\right) = -\frac{n}{\theta^2} + 2 \frac{\sum E x_i}{\theta^3}$$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2n}{\theta^2} = \frac{n}{\theta^2}$$

وهي معلومات فيشر التي تفقد العينات العشوائية حول المعسلة θ

المقدّر النقطي ذو التباينة الأصغر

يفترض لدينا مجتمعاً إحصائياً موصوفاً بتوزيع احتمالي وسيطة المجهول θ

ولنا أنه حيث كانت عينات حجمها n وليكن $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ مقدّر نقطي وحيد

لتابع وسيطة θ أي عينة θ $E T = \psi(\theta)$ عندئذ سوف نتحقق لدينا

$$V(T) \geq \frac{(\psi'(\theta))^2}{I_L}$$

وتدعى هذه المتباينة متباينة غرامر - راو

وكن ما على المسامحة في هذه المتباينة يسيرة أن التباينة T أصغر

الطرف الأيمن من المتباينة عند غرامر وفي الحالة الخاصة إذا كانت $\psi(\theta) = \theta$

$$V(T) \geq \frac{1}{I_L}$$

حيث الطرف الأيمن من متباينة غرامر - راو

وهو مقلوب معلومات فيشر